Μαθημα 19ο 13/5/2017

Τοπολογια

Προταση

$(E,\rho)$ συμπαγης μ.χ $\overset{ορ.}{\Longleftrightarrow}$ $\Big\{$ για καθε ανοιχτη καλυψη του $E$ υπαρχει πεπερασμενη υποκαλυψη (Borel - Heine)

⊛ $S \subseteq E$, $S$ συμπαγες συνολο $\overset{ορ}{\Longleftrightarrow}$ $\Big\{$ Ο μετρικος υποχωρος $S$ ειναι συμπαγης

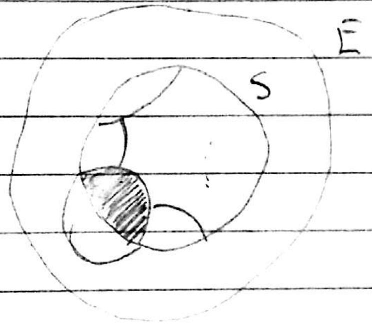
⊛ $(E,\rho)$ διακριτος μ.χ

1) $E$ πεπερασμενος

2) $E$ απειρο — συλλογη ανοιχτων υποσ. ξενων

$\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in E\}$ ανοιχτη καλυψη του $E$

↳ γιατι ειναι διακριτος




Προταση

Εστω $S \subseteq E$ μ.χ. Τοτε

$S$ συμπαγες $\Longleftrightarrow$ $\Big\{$ Για καθε ανοιχτη σε $E$ καλυψη του $S$ υπαρχει πεπερασμενη υποκαλυψη ⊛

Αποδειξη

($\Rightarrow$) Εστω $S$ συμπαγες. Θδο ισχυει το ⊛

Εστω $A_i$, $i \in I$ μια ανοιχτη σε $E$ καλυψη του $S$

Αρα $S \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow S = S \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \underbrace{(S \cap A_i)}_{B_i} = \bigcup_{i\in I} B_i$

$B_i, i \in I$ ανοιχτη εν $S$ καλυψη του $S \Rightarrow \exists J \underset{\text{πεπερ.}}{\subseteq} I$

$S = \bigcup_{i \in J} B_i = \bigcup_{i \in J} (S \cap A_i) = S \cap \left( \bigcup_{i \in J} A_i \right) \Rightarrow$

$S \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$

Το αντιστροφο Ισχυει ως ασκηση

**Προταση** (ισχυρη ιδιοτητα η συμπαγια)

Καθε συμπαγης μ.χ ειναι ολικά φραγμενος μ.χ (αρα και φραγμενος μ.χ)

**Αποδειξη** σφαιρα με ακτινα ε

Εστω ε>0 (τυχον). Θεωρω την συλλογη $B(x, \varepsilon) : x \in E$

Τοτε $E = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ (ανοιχτη καλυψη του $E$)

Επειδη $E$ συμπαγης, υπαρχει πεπερασμενη υποκαλυψη $B(x, \varepsilon) : x \in E$ Δηλ.

$E = B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) \subseteq E$

## Αριθμος Lebesgne

**Λημμα**

Εστω $(E, \rho)$ μ.χ ακολουθιακα συμπαγης και $A_i, i \in I$ ανοιχτη καλυψη του $E$. Τοτε υπαρχει ε>0 :

$(\forall x \in E)(\exists i \in I) : B(x, \varepsilon) \subseteq A_i$

(ε, αριθμος Lebesgne)

Θεωρημα

Εστω $(E,\rho)$ μ.χ. Τοτε τα παρακατω ειναι ισοδυναμα

i) $(E,\rho)$ ειναι συμπαγης

ii) $(E,\rho)$ ειναι πληρης και ολικα φραγμενος

iii) $(E,\rho)$ ειναι ακολουθιακα συμπαγης

Αποδειξη

ΘΔΟ (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (iii) Εστω $(E,\rho)$ ειναι συμπαγης και οχι ακολουθιακα συμπαγης. Αρα υπαρχει ακολουθια $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $E$ που δεν εχει συγκλινουσα ακολουθια στο $E$. Επομενως καθε $x\in E$ δεν ειναι σ.σ της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Θεωρω τυχον $x\in E$. Το $x$ δεν ειναι σ.σ, αρα $(\exists \underset{\text{ανοιχτη}}{U(x)})$ $a_\nu\in U(x)$ για πεπερασμενα $\nu\in\mathbb{N}$

$$E=\bigcup_{x\in E}U(x)\overset{E\text{ συμπ.}}{\Longrightarrow} E=\bigcup_{k=1}^{n}U(x_k) \quad \text{ατοπο!}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Εστω $(E,\rho)$ ακολ. συμπαγης. ΘΔΟ $(E,\rho)$ ειναι συμπαγης. Εστω $A_i$, $i\in I$ ανοιχτη καλυψη του $E$. Τοτε απο το λημμα Lebesgne, υπαρχει ε>0 ..... Επειδη ο $(E,\rho)$ ως ακολ. συμπαγης ειναι και ολικά φραγμενος, $\exists\{B(x_1,\varepsilon),\dots,B(x_k,\varepsilon)\}$ καλυψη του $E$ με $E=\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$

$\hookrightarrow B(x_i,\varepsilon)\subseteq A_i$

Ασκηση

Εστω $(E,\rho)$ μ.χ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθια εν $E$ και $l \in E$: $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l$. ΝΔΟ το συνολο $\{a_\nu : \nu\in\mathbb{N}\} \cup \{l\} = S$ ειναι συμπαγες υποσυνολο του $E$

Αποδειξη

Εστω $A_i$, $i\in I$ ανοιχτη εν $E$ καλυψη του $S$

Δηλ $S \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Τοτε $l\in S \Rightarrow (\exists i_0\in I)\ l\in A_{i_0}$

$$\xrightarrow{l=\lim a_\nu} (\exists \nu_0)(\forall \nu\geq\nu_0)\ a_\nu \in A_{i_0}$$

$A_{i_0}$ ανοιχτο

$$\exists A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{\nu_0-1}} : x_{i_\lambda} \in A_{i_\lambda} \quad \lambda = 1,\dots,\nu_0-1$$

Τοτε $l\in S \Rightarrow (\exists i_0\in I)\ l\in A_{i_0}$

$$C = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{\nu_0-1}}\} \cup \{A_{i_0}\}$$

Νικολιδακη

Προταση

$(E,\rho)$ συμπαγης $\overset{op}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (U_i)$ καλυμμα ανοιχτο $\exists$ πεπερ υποκαλυμμα

$(E,\rho)$ ολ. φραγμ $\overset{op}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0$ : $E = \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i,\varepsilon)$ $\exists n\in\mathbb{N}$, $\exists a_1,\dots,a_n\in E$

$(E,\rho)$ συμπαγης $\Rightarrow$ ολικα φραγμ. (1)

Αποδ. (1)

Θεωρουμε $\{\overbrace{B(a,\varepsilon)}^{\alpha\pi} : a\in E\}$, εστω $\varepsilon>0$ και

$E = \bigcup_{a\in E} B(a,\varepsilon)$

Ασκηση

Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

1. $(E,\rho)$ συμπαγης

2. Καθε καλυμμα του $E$ απο ανοιχτες σφαιρες εχει πεπερασμενο υποκαλυμμα.

Λυση

$1 \Rightarrow 2$ αμεσο!

υποθεση

$2 \Rightarrow 1$ Αν $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτο καλυμμα του $E$, τοτε

$\exists \{U_{i_1},\dots,U_{i_n}\}$ πεπερασμενο υποκαλυμμα

(1) $\Rightarrow E = \bigcup_{i\in I} U_i \quad \forall a \in E \Rightarrow a \in U_a$

$a \in U_a$, $U_{i_a}$ ανοιχτο συνολο $\Rightarrow \exists \delta_a : B(a,\delta_a) \subseteq U_{i_a}$

Θεωρουμε το εξης καλυμμα απο ανοιχτες σφαιρες

$S_1 = \{B(a,\delta_a) : a \in E\}$, $\bigcup S_1 = E$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists$ πειρ, $a_1,\dots,a_n \in E$

$E = \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k,\delta_{a_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_{a_k}} \subseteq E \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_{a_k}} = E$

$\Rightarrow \{U_{a_1},\dots,U_{a_n}\}$ πεπερ υποσ του $U_i$

$B(a_k,\delta_{a_k}) \subseteq U_{i_{a_k}}$

Ορισμος

$(E,\rho)$ ακολουθιακα συμπαγης αν (οριο) $\forall (x_n)_n \subseteq E$

$\exists x \in E$, $\exists (x_{k_n})_n$ υπακολ. της $(x_n)_n$ : $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$

Προταση

Αν $(E,\rho)$ ακολουθιακα συμπαγης $\Rightarrow$ ολικα φραγμ.

Αρκει $\forall (x_n)_n \subseteq E$ νδο $\exists (x_{k_n})_n$ βασικη υπακολ.

Μα εξ' ορισμου $\exists$ συγκλινουσα στο $E$ υπακολ αρα βασικη

Scanned by CamScanner

Προταση

$(E,\rho)$ ακολ. συμπαγης $\Rightarrow (E,\rho)$ πληρες

Αποδειξη

Εστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη ακολουθια στον $E$ ①

οδο $\exists\, x\in E : x_n \xrightarrow{\rho} x$

Ομως $(E,\rho)$ ακολ. συμπαγης $\Rightarrow \exists\, (x_{k_n})_n$ υπακ. $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ ②

Αμεσο απο ①, ② $\Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} x$

Προταση

Αν $(E,\rho)$ πληρης και ολικα φραγμενος $\Rightarrow (E,\rho)$ ακολ. συμπαγης

Αποδειξη

Εστω $(x_{k_n})_n$ οδο $\exists$ συγκλινουσα στο $E$ υπακολ.

$(E,\rho)$ ολικα φραγμ. $\Rightarrow \exists\, (x_{k_n})$ υπακολ. βασικη $\Rightarrow \exists\, x\in E : x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$

Ασκηση

$f:(0,1]\to[1,+\infty)$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ δεν ειναι ομ. συνεχης στο $(0,1]$

Προταση

$f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$ ομοιομ. συνεχης

$\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n$ ζευγος ακολ. στο $E$ ωστε

$\rho_1(x_n,y_n)\longrightarrow 0 \Rightarrow \rho_2(f(x_n), f(y_n))$

$x_n=\frac{1}{2n}\in(0,1]$ $\quad |f(x_n)-f(y_n)|\ \forall n$

$y_n=\frac{1}{3n}\in(0,1]$ , $|x_n-y_n|=|3n-2n|=n\to+\infty$

$|y_n-x_n|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n}\right|\longrightarrow 0$